10

1)

A

Sabemos que el conjunto de conectores $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es adecuado (ej. 5.a, práctica 4). Luego basta demostrar que estos conectores lógicos pueden expresarse usando el chirimbolo.

En la tabla de verdad de $\aleph$ tenemos que si $p_1 = p_2 = p_3$ entonces $\aleph(p_1, p_2, p_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = p_2 = p_3 = 0 \\ 0 & \text{si } p_1 = p_2 = p_3 = 1 \end{cases}$. Luego $\aleph(p,p,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p = 1 \end{cases}$.

Esto es la negación de p. Entonces $\neg p = \aleph(p,p,p)$.

Cuando $p_1 = p_2$, tenemos las siguientes tablas de verdad.

$p_1 = p_2$	p_3	$\aleph(p_1,p_2,p_3)$	$p_1 \wedge p_3$	$\neg(p_1 \wedge p_3)$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0

Esto prueba que $\aleph(p,p,q) = \neg(p \wedge q)$ ya que sus tablas son iguales. Entonces $\neg\aleph(p,p,q) = \neg(\neg(p \wedge q)) = p \wedge q$. Por lo tanto $p \wedge q = \neg\aleph(p,p,q) = \aleph(\aleph(p,p,q), \aleph(p,p,q), \aleph(p,p,q))$.

Si $p_1 = p_3$ tenemos lo siguiente:

$p_1 = p_3$	p_2	$\aleph(p_1,p_2,p_3)$	$p_1 \vee p_2$	$\neg(p_1 \vee p_2)$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

De forma análoga a lo anterior, tenemos a partir de estas tablas que $p \vee q = \neg\aleph(p,q,p) = \aleph(\aleph(p,q,p), \aleph(p,q,p), \aleph(p,q,p))$.

Esto demuestra que el chirimbolo es adecuado ya que cualquier función booleana puede expresarse con el conjunto de conectores adecuados $\{\neg, \wedge, \vee\}$, y en cualquier función booleana expresada con dichos conectores podemos reem

NOTA

plazar a estos por las fórmulas equivalentes semánticamente que dimos.

(2)

A

a. Verdadero. Demostramos por el absurdo.

Sup. que $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ pero que no existe $p_i \in PROP$ tq o bien $p_i \in \Gamma_1$ y $\neg p_i \in \Gamma_2$ o bien $\neg p_i \in \Gamma_1$ y $p_i \in \Gamma_2$. Es decir, para todo $p_i \in PROP$ vale alguna de las siguiente:

1. $p_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$ o $\neg p_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$
2. $p_i, \neg p_i \in \Gamma_1$ y $p_i, \neg p_i \in \Gamma_2$

La opción 2 no puede ser cierta ya que Γ_1 y Γ_2 no serían consistentes, por lo cual sólo puede ocurrir (1).

Como $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, debe existir $\varphi \in FORM$ tq $\varphi \in \Gamma_1$ y $\varphi \notin \Gamma_2$ o bien $\varphi \notin \Gamma_1$ y $\varphi \in \Gamma_2$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $\varphi \in \Gamma_1$ y $\varphi \notin \Gamma_2$. Dado que Γ_2 es maximal consistente, debe valer que $\neg\varphi \in \Gamma_2$ (ej. 4.b, práctica 5). Luego $\Gamma_1 \vdash \varphi$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\varphi$ y, por correctitud de SP, $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \not\models \varphi$.

Como Γ_1 y Γ_2 son consistentes, también son satisfacibles. Luego existen valuaciones v_1, v_2 tq $v_1 \models \Gamma_1$ y $v_2 \models \Gamma_2$. Dado que $\Gamma_1 \models \varphi$ y $\Gamma_2 \not\models \varphi$, $v_1 \models \varphi$ y $v_2 \not\models \varphi$ por definición de consecuencia semántica. Entonces $v_1 \neq v_2$.

Como $v_1 \models \Gamma_1$, tiene que valer que $v_1(p_i) = 1$ $\forall p_i \in \Gamma_1$ y $v_1(p_j) = 0$ $\forall p_j$ tq $\neg p_j \in \Gamma_1$. El mismo argumento se puede hacer con v_2 y Γ_2. Por lo probado en el primer párrafo, $\forall p_i \in PROP$ $p_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$ o $\neg p_i \in \Gamma_1, \Gamma_2$. Entonces $\forall p_i \in PROP$ $v_1(p_i) = v_2(p_i) = 1$ o $v_1(p_i) = v_2(p_i) = 0$. Pero entonces, como una valuación es una función de PROP a $\{0, 1\}$, v_1 y v_2 tienen que ser iguales. Esto es absurdo ya que en el párrafo anterior vimos que $v_1 \neq v_2$.

b. Falso. alcanza un contraejemplo

Separamos la demostración en dos casos: $\Gamma_1=\Gamma_2$ y $\Gamma_1\neq\Gamma_2$

~~Sup. $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ consistente. Es trivial que $\Gamma_1\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Veamos que $\Gamma_1=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ probando que $\Gamma_1\not\subset\Gamma_1\cup\Gamma_2$ por el absurdo. Si $\Gamma_1\subset\Gamma_1\cup\Gamma_2$ entonces existe φ tq $\varphi\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ pero $\varphi\notin\Gamma_1$. Como $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ es consistente, $\Gamma_1\cup\{\varphi\}\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2$ también debe serlo (si no $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ no sería consistente). Pero Γ_1 es maximal consistente, por lo cual no existe $\psi\in FORM$ tq $\Gamma_1\cup\{\psi\}$ es consistente y $\psi\notin\Gamma_1$. Luego llegamos a un absurdo, por lo que $\Gamma_1=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Pero entonces.~~ Por el punto a, existe $p_i\in PROP$ tq $p_i\in\Gamma_3$ y $\neg p_i\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$ o $\neg p_i\in\Gamma_3$ y $p_i\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Pero entonces $\Gamma_3\not\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

Sup. $\Gamma_1\neq\Gamma_2$. La afirmación del punto a implica que si $\Gamma\neq\Gamma'$ y Γ,Γ' m.c. entonces existe φ tq $\varphi\in\Gamma$ y $\neg\varphi\in\Gamma'$. Luego como $\Gamma_3\neq\Gamma_1$ y $\Gamma_3\neq\Gamma_2$, existen α,β tq $\alpha\in\Gamma_3$ y $\neg\alpha\in\Gamma_1$ y $\beta\in\Gamma_3$ y $\neg\beta\in\Gamma_2$. Sea $\varphi=\alpha\wedge\beta$. φ tiene que estar en Γ_3 ya que $\Gamma_3\vdash\alpha$ y $\Gamma_3\vdash\beta$, luego por corectitud de SP $\Gamma_3\models\alpha$ y $\Gamma\models\beta$ y entonces $\Gamma_3\models\alpha\wedge\beta$ y, por completitud, $\Gamma_3\vdash\alpha\wedge\beta$. Pero $\varphi\notin\Gamma_1$ porque $\neg\alpha\in\Gamma_1$. Si φ estuviera en Γ_1, como $\Gamma_1\vdash\varphi\Rightarrow\Gamma_1\models\varphi\Rightarrow\Gamma_1\models\alpha\Rightarrow\Gamma_1\vdash\alpha$, Γ_1 sería inconsistente. Análogamente, $\varphi\notin\Gamma_2$ porque si no $\Gamma_2\vdash\beta$ y $\Gamma_2\vdash\neg\beta$ y no sería consistente. Pero entonces $\varphi\notin\Gamma_1\cup\Gamma_2$ y por ende $\Gamma_3\not\subseteq\Gamma_1\cup\Gamma_2$.

3)

a. Un elemento e del universo es distinguible si existe una $\mathcal{I}$-fórmula φ con única variable libre x tq $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ sii $v(x) = e$.

Propongo la siguiente φ: $\varphi = f(x) = x \wedge (\exists y)(y \neq x \wedge f(y) = x)$.

Pruebo ahora que φ distingue al 1.

- $v(x) = 1 \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi[v]$:

$\mathcal{I} \models \varphi[v] \Leftrightarrow \mathcal{I} \models f(x) = x\ [v]$ y $\mathcal{I} \models (\exists y)(y \neq x \wedge f(y) = x) \Leftrightarrow$

$f^{\mathcal{I}}(v(x)) = v(x)$ y existe $a \in I$ tq $\mathcal{I} \models y \neq x \wedge f(y) = x\ [v']$ donde $v' = v[y=a]$

$f^{\mathcal{I}}(1) = 1$ y existe $a \in I$ tq $\mathcal{I} \models y \neq x\ [v']$ y $\mathcal{I} \models f(y) = x\ [v'] \Leftrightarrow$

$1^2 = 1$ y existe $a \in I$ tq $a \neq v'(x)$ y $f^{\mathcal{I}}(a) = v'(x) \Leftrightarrow$

$1^2 = 1$ y existe $a \in I$ tq $a \neq 1$ y $a^2 = 1$ ✓

Esto último vale para $a = -1$.

- no $v(x) = 1 \Rightarrow$ no $\mathcal{I} \models \varphi[v]$:

Haciendo un desarrollo similar al de antes obtenemos que no $\mathcal{I} \models \varphi[v] \Leftrightarrow$ no $(v(x)^2 = v(x)$ y existe $a \in I$ tq $a \neq v(x)$ y $a^2 = v(x))$.

Esto es cierto ya que si $v(x)^2 = v(x)$ entonces $v(x) = 1$ ó 0. Como $v(x) \neq 1$ por hipótesis, $v(x)$ tiene que ser 0. Pero entonces ningún número real $z \in [-1; 1]$ distinto a 0 cumple que $z^2 = 0$. ✓

Por lo tanto $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ sii $v(x) = 1$. muy bien!

b. Primero doy fórmulas que distinguen a todos los enteros de $\mathbb{R}_{>0}$.

$\varphi_1(x) = (\forall y)(d(y,x) = y)$

$\varphi_n(x) = (\forall y)(\varphi_n(y) \rightarrow s(y) = x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

Interpretando $\varphi_1(x)$ se puede ver que $\mathcal{R} \models \varphi_1(x)[v]$ sii para todo $a \in \mathbb{R}_{>0}$

$a / v(x) = a$. Es claro que esto vale sii $v(x) = 1$. ✓

Probamos inductivamente que $\varphi_n(x)$ distingue a n asumiendo que φ_{n-1} distingue a $n-1$. Interpretando $\varphi_n(x)$ tenemos que $\mathcal{R} \models \varphi_n(x)[v]$ sii para todo $a \in \mathbb{R}_{>0}$ si $a = n-1$ entonces $(n-1)+1 = v(x)$. Es trivial que esto es cierto sii $v(x) = n$. ✓

Sea $r \in \mathbb{R}_{>0}$ racional y sean $s, t \in \mathbb{N}_{>0}$ coprimos tq $r = \frac{s}{t}$. ¡bien!

Propongo la siguiente fórmula para distinguir a r:

$\psi(x) = (\forall y)(\forall z)((\varphi_s(y) \wedge \varphi_t(z)) \to x = d(y,z))$. ó $(\exists y)(\exists z)\ \varphi_s(y) \wedge \varphi_t(z) \wedge x = d(y,z)$

Esta fórmula está bien definida ya que para todo racional positivo r existen enteros positivos s, t únicos tq $r = \frac{s}{t}$ y s, t son coprimos. ✓

Veamos que $\mathcal{R} \models \psi(x)[v]$ sii $v(x) = r$. Interpretando $\psi(x)$ se tiene que $\mathcal{R} \models \psi(x)[v]$ sii para todo $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ si $a = s$ y $b = t$ entonces $v(x) = \frac{a}{b}$. Esto vale sii $v(x) = \frac{a}{b} = \frac{s}{t} = r$.

Como r es cualquier racional positivo, todo racional positivo es distinguible. ✓

A^+

4)

Supongo que la clase de modelos es definible y φ la sentencia que la define.

Defino las fórmulas Ψ_i tq $\mathcal{M} \models \Psi_i$ sii $f_{\mathcal{M}}(f_{\mathcal{M}}(\cdots(f_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{M}}))\cdots)) \neq c_{\mathcal{M}}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$\Psi_1 = f(c) \neq c$, $\Psi_2 = f(f(c)) \neq c$, ..., $\Psi_n = \underbrace{f(f(\cdots(f(c))\cdots))}_{n \text{ veces}} \neq c$

Estas fórmulas están bien definidas para todo $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ya que n es finito.

Sea $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \{\Psi_i\}$ y $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$. Es claro que Γ' no es satisfacible ya que si lo fuera ninguna cantidad de aplicaciones iterativas de $f_{\mathcal{M}}$ a $c_{\mathcal{M}}$ sería igual a $c_{\mathcal{M}}$ (por las fórmulas $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$) pero todo elemento e del dominio es tal que $\underbrace{f_{\mathcal{M}}(\cdots(f_{\mathcal{M}}(e))\cdots)}_{n_e \text{ veces}} = c_{\mathcal{M}}$ (por φ) para algún $n_e \in \mathbb{N}_{>0}$.

Veamos ahora que Γ' es satisfacible. Sea $\Delta \subseteq \Gamma'$ finito. Si Δ es vacío entonces es trivialmente sastisfacible. Si $\Delta = \{\varphi\}$ entonces el modelo $\mathcal{M}$ con universo $\{1\}$, $f_{\mathcal{M}}(x) = 1$ y $c_{\mathcal{M}} = 1$ satisface a Δ. Si $\Delta \neq \emptyset$ y $\Delta \neq \{\varphi\}$ entonces debe existir algún Ψ_i en Δ. Sea $K \in \mathbb{N}_{>0}$ el más grande tq $\Psi_K \in \Delta$. Defino la interpretación $\mathcal{M}$ con universo $M = \{0, 1, \ldots, K\} = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq K\}$, $f_{\mathcal{M}}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < K \\ 0 & \text{si } x = K \end{cases}$ y $c_{\mathcal{M}} = K$.

Es claro que para todo $a \in M$ se obtiene $c_{\mathcal{M}}$ tras una cantidad finita de aplicaciones de $f_{\mathcal{M}}$, pero para $c_{\mathcal{M}}$ se necesitan $K+1$ aplicaciones. Luego $\mathcal{M} \models \Psi_i$ para todo $i \leq K$ y $\mathcal{M} \models \varphi$. Como estas son las únicas fórmulas que pueden aparecer en Δ, $\mathcal{M} \models \Delta$.

Probamos que ~~para~~ todo subconjunto finito de Γ' es satisfacible. Luego, por compacidad, Γ' debe ser satisfacible. Pero ya habíamos visto que Γ' no es satisfacible. Llegamos entonces a un absurdo a partir de asumir que la clase de modelos es definible. Por lo tanto, esta no puede ser definible.

¡Excelente!